

ABHÄNGIGKEIT DER LAMINAREN ABLÖSESTELLE VON MACH-ZAHL UND WÄRMEÜBERGANG BEI STATIONÄRER SINUSFÖRMIG MODULIRTER AUSSENSTRÖMUNG

(Beitrag zur Frage des Zusammenhangs zwischen
laminarer Ablösung und Umschlagpunkt)

ALFRED WALZ

Professor, Technische Hochschule Karlsruhe und DVL-Institut
Freiburg i/Br., Germany

EINLEITUNG

Mein Vortrag behandelt die Frage, wie sich die laminare Grenzschicht an einer festen Wand bei einer stationär und sinusförmig modulierten Aussenströmung abhängig von MACH-Zahl und Wärmeübergang entwickelt. In diesem Fall wechseln in Strömungsrichtung Gebiete mit beschleunigter und verzögerter Strömung einander ab. Im Bereich der verzögerten Strömung tritt dabei nach einer gewissen Lauflänge, die natürlich von der Amplitude, aber auch—wie wir feststellen werden—von MACH-Zahl und Wärmeübergang abhängt, laminare Ablösung ein.

Diese Aufgabenstellung ist in mehrfacher Hinsicht mit dem Problem des Umschlages der laminaren Grenzschicht in den turbulenten Zustand verknüpft.

So ist es bekannt, dass die laminare Ablösung den Umschlag erzwingen, also die spätest mögliche Stelle des Umschlages sein kann. Dabei wird aber in der Regel das Umschlagen vor dieser Ablösestelle nach bekannten Ergebnissen der Stabilitätstheorie stark begünstigt, da die laminaren Geschwindigkeitsprofile in jedem Druckanstiegsbereich der modulierten Aussenströmung Wendepunkte aufweisen. Schliesslich steht unsere Aufgabenstellung auch mit dem Problem der Oberflächen-Rauhigkeit als möglicher Ursache des Umschlages in Verbindung. Unter Oberflächen-Rauhigkeit versteht man bekanntlich eine mehr oder weniger periodische Modulierung der Oberfläche, die nach der Potentialtheorie stets

auch eine Modulierung der Geschwindigkeit der Aussenströmung und damit auch der Grenzschichtströmung zur Folge hat. Bei *inkompressibler Strömung* klingt der Einfluss einer solchen Oberflächenrauigkeit (die man auch als Grenzfall einer Welligkeit der Oberfläche ansehen kann) schon aus potentialtheoretischen Gründen mit dem Wandabstand rasch ab. Bei Beachtung des Zähigkeitseinflusses, d.h. der Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Potentialströmung ergibt sich ein noch geringerer Einfluss der "Wandwelligkeit" auf die Aussenströmung. Dieser Einfluss ist aber in jedem Fall, ob die Rauigkeitserhebungen gegenüber der Grenzschichtdicke klein sind oder nicht, vorhanden. Bei *kompressibler Strömung* ist die Wirkung der Wandwelligkeit auf die Aussenströmung stärker als bei inkompressibler Strömung. In einer *Überschallströmung* ($M > 1$) klingt der Einfluss einer Wandwelligkeit bei Vernachlässigung der Zähigkeit überhaupt nicht ab (vergleiche die schematische Darstellung des Stromlinien-Verlaufes an einer welligen Wand bei $M = 0$, $M = 1$ und $M > 1$ in Fig. 1). Nur durch den Einfluss der Zähigkeit innerhalb der Grenzschicht ergibt sich auch bei kompressibler Strömung eine gewisse Abschwächung des Einflusses einer Wandwelligkeit (Wand-Rauigkeit) auf die Aussenströmung.

Man kann nun behaupten, dass in jedem Fall ein eindeutiger Zusammenhang zwischen einer vorgegebenen Wandwelligkeit und der dadurch bedingten Modulierung der Aussenströmung ausserhalb der Grenzschicht mit definiert endlich angenommener Dicke besteht. Dieser Zusammenhang kann grundsätzlich bei hinreichend grossem Zeit- und Rechenaufwand aus der PRANDTL'schen Grenzschichtgleichung oder nötigenfalls aus den NAVIER-STOKESS'schen Gleichungen durch ein numerisches Iterationsverfahren ermittelt werden.

Zur Vereinfachung der Aufgabenstellung wollen wir jedoch von einer vorgegebenen Modulation der wandparallelen Geschwindigkeit dieser zweidimensionalen Aussenströmung ausgehen und die Frage nach der zugeordneten Modulation der Oberfläche offenlassen. Bei dieser Formulierung der Aufgabenstellung kann die Modulation der Aussengeschwindigkeit z.B. auch von einer gewellten Gegenwand herrühren und die Wand, an der wir die Grenzschichtentwicklung verfolgen wollen, glatt sein. Es kann aber auch eine turbulente Schwankungsbewegung, die in der Aussenströmung mitgeführt wird, z.B. eine KARMAN'sche Wirbelstrasse,

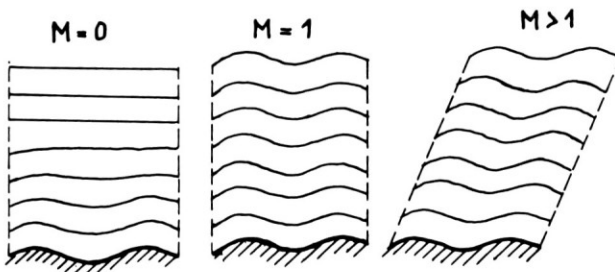


Fig. 1. Einfluss einer Wandwelligkeit auf das Strömungsfeld, Stromlinienverlauf: (a) bei inkompressibler Strömung ($M = 0$), (b) bei Anströmung mit Schallgeschwindigkeit ($M = 1$), (c) bei Überschall-Strömung ($M > 1$). (aus Sauer, Gasdynamik, Springer-Verlag.)

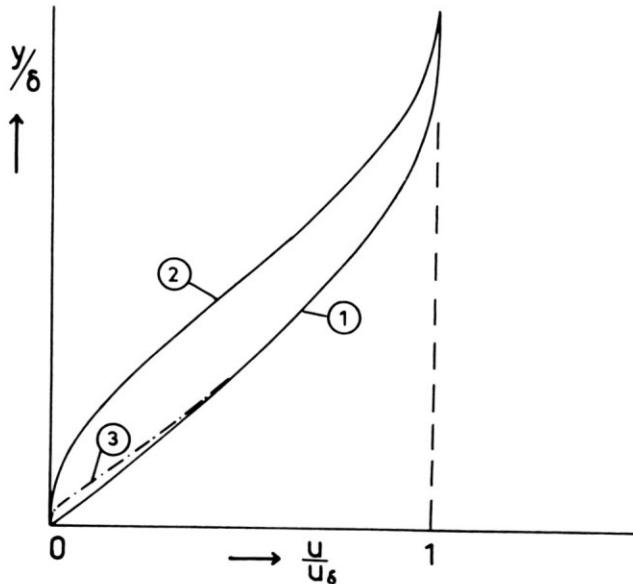


Fig. 1a. Vergleich von zwei Geschwindigkeitsprofilen mit verschwindender Wandtangente mit dem Blasius-Profil: (1) der ebenen Platte; (2) Hartree-Ablöseprofil; (3) Geschwindigkeitsprofil in einer Strömung mit plötzlichem Druckanstieg auf kurzer Lauflänge.

als Ursache der Geschwindigkeitsmodulation angenommen werden. Im zuletzt genannten Falle müsste allerdings ein instationäres (dreidimensionales) Grenzschichtproblem gelöst werden, das im Rahmen dieses Vortrages nicht behandelt werden kann.

PRÄZISIERUNG DER AUFGABENSTELLUNG

Wir betrachten somit eine zweidimensionale stationäre Strömung längs einer ebenen Wand (ebenen Platte), die mit der x -Richtung des Koordinatensystems zusammenfallen möge. Die x -Komponente der ungestörten Strömungsgeschwindigkeit ausserhalb der Grenzschicht (d.h. in Wandabständen $y > \delta$) bezeichnen wir mit U_δ , die x -Komponente der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht mit u . Der Geschwindigkeit U_δ sei eine stationäre Strömungsgeschwindigkeit (mit hier nicht näher definiertem Ursprung) überlagert, für die wir der Einfachheit halber eine sinusförmige Verteilung über die Plattenlänge L annehmen wollen. Die Amplitude dieser Strömungsgeschwindigkeit sei Δu_δ , die Wellenlänge der Störungsverteilung Λ . Für die resultierende Geschwindigkeit u_δ am Rande der Grenzschicht, die der Grenzschicht-Berechnung zugrundegelegt werden muss, gilt dann, mit U_δ als Geschwindigkeitsmasstab und

$$\epsilon = \frac{\Delta u_\delta}{U_\delta} \quad (1)$$

als relativer Störungsamplitude, die Beziehung

$$\frac{u_\delta(x)}{U_\delta} = 1 + \epsilon \sin\left(\frac{L}{\Lambda} \frac{x}{L} 2\pi\right) \quad (2)$$

Das Verhältnis

$$\frac{L}{\Lambda} = p \quad (3)$$

gibt die Zahl der Wellen auf der Plattenlänge L an und kann demnach als eine Art Modulationsfrequenz angesehen werden.

Die relative Störungsamplitude ϵ und die Wellenzahl p sind Parameter bei der Grenzschicht-Berechnung.

Mit der Berechnung der laminaren Grenzschicht auf der Basis der Gleichung (2) (in der anstelle des sin-Gesetzes natürlich auch das cos-Gesetz stehen kann) haben sich für den Fall *inkompressibler Strömung* schon mehrere Autoren befasst. In voliegendem Beitrag werden diese Rechnungen mit neuen Rechen-Verfahren wiederholt und durch Einschluss kompressibler Strömungen ohne und mit Wärmeübergang verallgemeinert.

Bevor die neuen Rechen-Verfahren und die damit erzielten Ergebnisse beschrieben werden, sollen die wesentlichen Ergebnisse früherer Rechnungen für inkompressible Strömung kurz skizziert und kritisch beleuchtet werden.

BISHERIGE LÖSUNGEN FÜR INKOMPRESSIBLE STRÖMUNG

H. L. Dryden¹ hat 1936 erstmals die inkompressible laminare Grenzschicht für eine Aussenströmung nach Gl. (2) mit der damals einzigen, für eine so allgemeine Aufgabenstellung geeigneten Näherungstheorie von v. Kármán und Pohlhausen² berechnet. Etwa gleichzeitig hat J. Pretsch,³ unabhängig davon, die gleiche Aufgabe mit der gleichen Theorie behandelt. Einige Jahre später konnten dann A. W. Quick und K. Schröder⁴ mit einem Fortsetzungsverfahren, bei dem die PRANDTLSCHE Grenzschicht-Gleichung durch eine schrittweise in x - und y -Richtung lösbare "Differenzgleichung" ersetzt wird, genauere Lösungen für die Aufgabenstellung (2) angeben. Schliesslich entwickelte H. Görtler⁵ unter vereinfachenden Annahmen (Störungsrechnung der 1. Ordnung mit der Annahme, dass die relative Störungsamplitude ϵ [Gl. (1)] sehr klein und die Wellenzahl p [Gl. (3)] sehr gross sind) eine analytische Lösung des Problems mit Ergebnissen, die sich mit denen von Quick und Schröder in den dort durchgerechneten numerischen Einzelfällen deckten.

Als wesentliches Ergebnis aller genannten, teils ausgesprochen approximativen, teils quasi-exakten Lösungen für inkompressible Strömung ist hervorzuheben, dass eine beliebig kleine relative Störungsamplitude ϵ in der Verzögerungsphase der Störungswelle zu einer laminaren Ablösung führen kann, wenn nur eine genügend grosse Lauflänge x (eine ausreichend grosse Zahl von Wellenlängen Λ) betrachtet wird. Mit der von Dryden¹ und Pretsch³ benützten Näherungstheorie von Pohlhausen² wird bei einer relativen Störungsamplitude

$\epsilon = 0.02$ nach etwa 3 Wellenlängen laminare Ablösung erreicht. Die als genauer anzusehenden Rechnungen von Quick-Schröder und Görtler ergeben laminare Ablösung nach etwa gleicher relativer Lauflänge x/L schon bei $\epsilon = 0.005$, also bei viermal kleinerer relativer Störungsamplitude.

Bei einem kritischen Vergleich der Ergebnisse der Näherungstheorie von Pohlhausen² und den exakteren Lösungen ist zunächst zu beachten, dass der Beginn der laminaren Ablösung in allen Fällen mit dem Verschwinden der Wandschubspannung gleichgesetzt wird, ohne Rücksicht darauf, wie das Geschwindigkeitsprofil in weiterem Abstand von der Wand aussieht. Bei der Theorie von Görtler⁵ wird sogar vorausgesetzt, dass die durch die Störung (und die Ablösung) bedingte Änderung der Gesamtgrenzschichtdicke gering ist. Dies bedeutet, dass das Geschwindigkeitsprofil bei den vereinfachenden (praktisch aber häufig gerechtfertigten) Annahmen der GÖRTLERSCHEN Theorie nur in unmittelbarer Wandnähe wesentlich gegenüber dem Geschwindigkeitsprofil bei ungestörter Strömung verändert wird. Bei den GÖRTLERSCHEN Voraussetzungen, die z.B. bei einer rauhen Wand realisiert sein können, ist somit Strömungsablösung möglich, ohne dass Impuls- und Energiehaushalt der laminaren Grenzschicht nennenswert geändert werden, und ohne dass die später einzuführenden charakteristischen Grenzschichtgrößen: die Impulsverlust-Dicke δ_2 und die Energieverlust-Dicke δ_3 , sowie das Verhältnis dieser beiden Größen wesentlich beeinflusst werden. Es bildet sich an der Wand nur eine "Ablöseblase" aus, die in der nachfolgenden Beschleunigungsphase der periodischen Störung wieder völlig aufgelöst werden kann. Dieser Tatbestand ist ohne Zweifel wichtig für die Beurteilung der Frage, ob eine kleine, auf den wandnahen Teil beschränkte Ablösung den Umschlag in den turbulenten Zustand einleiten kann. Wahrscheinlich müssen Impuls- und Energieverlust einen gewissen kritischen Wert überschreiten, wenn der Umschlag durch periodisches laminares Ablösen und Wiederanliegen ausgelöst werden soll. Zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens (der Umschlag-Neigung) der laminaren Grenzschicht hat sich in der klassischen Stabilitätstheorie von Tollmien-Schlichting-Pretsch (siehe z.B. Ref. 6) neben einer kritischen Reynoldszahl, gebildet z.B. mit der Impulsverlustdicke δ_2 , R_{δ_2} , ein Formparameter des laminaren Geschwindigkeitsprofils als nützlich erwiesen, der (bei inkompressibler Strömung) z.B. mit dem Verhältnis der Energieverlustdicke δ_3 zur Impulsverlustdicke δ_2 oder durch das Verhältnis der Verdrängungsdicke δ_1 zur Impulsverlustdicke δ_2 gegeben sein kann [siehe definition dieser Größen, Gl. (8) bis (12)].

Ändern sich die Reynolds-Zahl R_{δ_2} und die so definierten Formparameter δ_3/δ_2 oder δ_1/δ_2 bei überlagerter Störungsgeschwindigkeit nur wenig gegenüber den Werten für die ungestörte laminare Grenzschichtströmung längs der ebenen Platte, so ist nach der klassischen Stabilitätstheorie auch beim Auftreten örtlicher kleiner Ablöseblasen, wie sie die recht genauen Rechnungen von Quick-Schröder und Görtler ergeben, offenbar nicht mit einem Umschlagen in den turbulenten Zustand zu rechnen.

Für die von Dryden¹ und Pretsch³ benützte Näherungstheorie von Pohlhausen² ist nun charakteristisch, dass der Formparameter der (ein-parametrig angenommenen) Geschwindigkeitsprofile aus der Bedingung für das Gleichgewicht der

Zähigkeits- und Druckkräfte unmittelbar an der Wand $y = 0$, aus der sogenannten "Wandbindung," bei gleichzeitiger Beachtung der Integralbedingung für den Impuls bestimmt wird. Hierbei wird notwendig der Einfluss des Druckgradienten auf den Formparameter des Geschwindigkeitsprofils (von dem Sonderfall der "ähnlichen" Lösungen der Grenzschichttheorie abgesehen) falsch bewertet und das Ergebnis der Rechnung verhältnismässig stark vom gewählten (ein-parametrischen) Ansatz für die laminaren Geschwindigkeitsprofile abhängig. Das Auftreten des Falles verschwindender Wandschubspannung, d.h. die Ablösung, ist bei diesem Verfahren mit dem Auftreten eines ganz bestimmten Geschwindigkeitsprofils gekoppelt, das gegenüber dem Geschwindigkeitsprofil der ungestörten ebenen Plattenströmung stark verändert ist. Es ist daher verständlich, dass nach Dryden und Pretsch stärkere Druckanstiege (grössere relative Amplituden ϵ) nötig erscheinen, um nach einer bestimmten Lauflänge der Strömung den Punkt verschwindender Wandschubspannung zu erreichen als bei den exakteren Rechnungen von Quick-Schröder und Görtler.

Nach K. Wieghardt⁷ lässt sich bei Beachtung neuer Vorschläge von D. Geropp⁹ dieser Mangel des Pohlhausen-Verfahrens weitgehend beseitigen, wenn man zusätzlich zur Integralbedingung des Impulses und der Wandbindung mit einem anpassungsfähigeren zwei-parametrischen Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil noch eine Integralbedingung für die Energie beachtet. Mit einem solchen zwei-parametrischen Ansatz können die bei den genaueren Rechnungen von Quick-Schröder und Görtler auftretenden Geschwindigkeitsprofile recht gut approximiert werden. Der Verfasser konnte zeigen,⁸ dass das Gleichungspaar, bestehend aus Impuls- und Energiesatz, auch mit einem ein-parametrischen Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil, ohne Beachtung der Wandbindung, in der Regel wesentlich genauere, von gewählten einparametrischen Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil weitgehend unabhängige Voraussagen für den Ablösepunkt liefert als das Pohlhausen-Verfahren.

Es erschien nun zweckmässig, die Näherungsrechnungen von Dryden und Pretsch zu wiederholen, und zwar

- (a) mit dem vorgenannten ein-parametrischen Rechenverfahren von A. Walz⁸ basierend auf den Integralbedingungen für Impuls und Energie,
- (b) mit einem zwei-parametrischen Rechenverfahren nach dem Prinzipvorschlag von K. Wieghardt mit den Verbesserungen von D. Geropp, bei dem gleichzeitig noch die Wandbindung berücksichtigt wird.

Dabei sollte mit der neuerdings verfügbaren verallgemeinerten Form dieser beiden Rechenverfahren^{9,10} auch

- (c) der Einfluss von Mach-Zahl und Wärmeübergang zumindest in seiner Tendenz untersucht werden.

Das Rechenverfahren von Wieghardt versagt bekanntlich in seiner ursprünglichen Form⁷ bei beschleunigter Strömung auf Grund einer Besonderheit des gewählten Polynoms.¹¹ Ordnung für das Geschwindigkeitsprofil. Ausserdem ist es nur bei inkompressibler Strömung anwendbar. D. Geropp² konnte die ange-deutete Schwierigkeit im Ansatz für das zweiparametrische Geschwindigkeitsprofil beseitigen und die Verallgemeinerung der Theorie auf kompressible Strömung mit Wärmeübergang durchführen. Damit war es möglich, das ganze unter (a)

bis (c) aufgeführte Rechenprogramm in Angriff zu nehmen, wobei Vergleichsmöglichkeiten mit anderen Rechenergebnissen vorerst nur bei inkompressibler Strömung bestehen.

Im Zeitpunkt der Anfertigung dieses Manuskriptes standen allerdings nur die Ergebnisse für die Programmpunkte (a) mit (c) zur Verfügung. Vorläufige Ergebnisse der Arbeit von D. Geropp⁹ (Dissertation) zeigen weitgehende Übereinstimmung mit den exakteren Rechnungen von Quick-Schröder und Görtler für inkompressible Strömung und bestätigen zumindest die Tendenz des Einflusses von Mach-Zahl und Wärmeübergang, der sich aus den Rechnungen von Walz¹⁰ ergibt. Sie werden vollständig erst etwa zum Zeitpunkt des Kongresses in Stockholm Ende August vorliegen und dort bekannt gegeben.

KURZE DARSTELLUNG DER NÄHERUNGSTHEORIE VON A. WALZ¹⁰ MIT EIN-PARAMETRIGEM GESCHWINDIGKEITSPROFIL

Als Geschwindigkeitsprofile werden, abweichend von den Verfahren von K. Pohlhausen,² die ein-parametrischen exakten "ähnlichen" Lösungen von D. R. Hartree¹¹ gewählt, die sich bei Aussenströmungen vom Typ $u_\delta \sim x^m$ ergeben. Jedem Wert des Exponenten m ist, bei geeigneter Verzerrung des x - und y -Massstabes der Strömung, ein ganz bestimmtes Geschwindigkeitsprofil zugeordnet (siehe Fig. 2). Die Gesamtheit der exakten Lösungen für das Geschwindigkeitsprofil bildet somit eine ein-parametrische Schar von Kurven, die man bei Einführung einer endlichen (von x abhängigen) Grenzschichtdicke δ grundsätzlich in der Form

$$\frac{u(x, y)}{u_\delta(x)} = f\left[\frac{y}{\delta(x)}, m\right] \quad u_\delta(x) \sim x^m \quad (4)$$

mit $u(x, y)$ als der x -Komponenten der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht $0 < y < \delta$ darstellen kann.

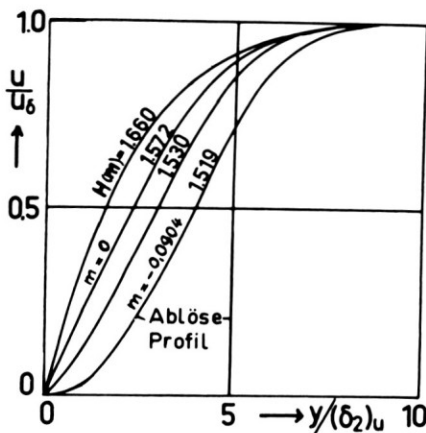


Fig. 2 Einige von D. R. Hartree¹¹ für Strömungen vom Typ $u_\delta \sim x^m$ exakt berechnete laminare Geschwindigkeitsprofile.

Für Zwecke der Näherungstheorie wird nun der Exponent m in Gl. (4) als der von x abhängige Formparameter des Geschwindigkeitsprofils angesetzt:

$$\frac{u(x, y)}{u_\delta(x)} = f \left[\frac{y}{\delta(x)}, m(x) \right]; \quad u_\delta(x) \text{ beliebig} \quad (5)$$

Damit ist der Ansatz (5) für die Geschwindigkeitsprofile mit den beiden Unbekannten $\delta(x)$ und $m(x)$ als Näherungslösung für beliebige Aussenströmungen $u_\delta(x)$ brauchbar.

Da nun mit dem Ansatz (5) über die bei beliebiger Aussenströmung $u_\delta(x)$ möglichen Geschwindigkeitsprofile eine (natürlich in der Regel etwas willkürliche, nur bei $u_\delta(x) \sim x^m$ exakt zutreffende) Festlegung getroffen ist, braucht zur näherungsweise Lösung des Grenzschichtproblems nicht mehr eine partielle Differentialgleichung gelöst zu werden. Es genügt vielmehr, die PRANDTLsche Grenzschichtgleichung

$$su \frac{\partial u}{\partial x} + sv \frac{\partial u}{\partial y} = s_\delta u_\delta \frac{du_\delta}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6)$$

in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(su)}{\partial x} + \frac{\partial(sv)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

(v = Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung, s = Dichte, μ = molekulare Zähigkeit, Randbedingungen: $y=0$: $u=0, v=0, y \rightarrow \infty$: $u \rightarrow u_\infty$ [oder $y=\delta$: $u=u_\delta$]) nur in Mittel über die Grenzschichtdicke δ zu erfüllen, Durch partielle Integration des Systems (6) (7) nach dem Wandabstand y gelingt es nach bekanntem Prinzip (siehe z.B. Ref. 7) beliebig viele Integralbedingungen in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen aufzustellen. Zur Bestimmung der Unbekannten $\delta(x)$ und $m(x)$ des Lösungsansatzes (5) werden jedoch nur zwei dieser Gleichungen benötigt. Es liegt nahe, dabei die physikalisch anschaulichen Integralbedingungen für Impuls und Energie (im nachfolgenden kurz "Impulsatz" und "Energiesatz" genannt) auszuwählen.

In diesen beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen treten dann wegen der partiellen Integration nach y von $y=0$ bis $y=\delta(x)$ wegen des Lösungsansatzes (5) nur noch die gesuchten Grössen $\delta(x)$ und $m(x)$ oder durch (5) bekannte Funktionen dieser Grössen auf. Dabei zeigt es sich, dass diese Gleichungen (Impuls- und Energiesatz) eine für die Rechnung besonders einfache Form annehmen, wenn man folgende Abkürzungen einführt:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{su}{s_\delta u_\delta} \right) d(y/\delta); \quad \frac{(\delta_1)u}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d(y/\delta)$$

Relative Verdrängungsdicke (8) (8a)

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{su}{s_\delta u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d(y/\delta); \quad \frac{(\delta_2)u}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d(y/\delta)$$

Relative Impulsverlustdicke (9) (9a)

$$\frac{\delta_3}{\delta} = \int_0^1 \frac{su}{s_\delta u_\delta} \left[1 - \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right] d(y/\delta); \quad \frac{(\delta_3)u}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \left[1 - \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right] d(y/\delta)$$

Relative Energieverlustdicke (10) (10a)

$$\begin{matrix} \vdots \\ \dots \end{matrix} \quad \boxed{Z = \delta_2 R_{\delta_2}} \quad R_{\delta_2} = \frac{s_\delta u_\delta \delta_2}{\mu_w} \quad \boxed{H = \frac{(\delta_3)u}{(\delta_2)u}} \quad (\mu_w = \mu_{y=0})$$

(11) (11a) (12)

Die mit dem Index u versehenen Integralausdrücke sind reine Formparameter des Geschwindigkeitsprofils, während die bei kompressibler Strömung auftretenden Ausdrücke (8) (9) (10) wegen der mit dem Druck p und der Temperatur T veränderlichen Dichte $s(p, T)$ noch zusätzlich von MACH-Zahl und Wärmeübergang abhängen. Da sich alle oben aufgeführten Ausdrücke für Wandabstände $y > \delta$ praktisch nicht ändern, ist es sinnvoll, die im Lösungsansatz (5) versuchsweise eingeführte Grenzschichtdicke δ z.B. durch den "Dickenparameter" Z nach (11) zu ersetzen. Es erweist sich ferner als vorteilhaft, den Formparameter m durch die Grösse H nach (12) zu ersetzen, wobei natürlich wegen (5) der neue Formparameter H eine eindeutige Funktion von m ist: $H = H(m)$. Ablösung (Wandschubspannung null) tritt ein, wenn $H < 1.519$ wird (Fig. 2).*

Mit den neuen Unbekannten $Z(x)$ und $H(x)$ nehmen Impuls- und Energiesatz bei inkompressibler Strömung $\left(\frac{s}{s_\delta} = 1 \right)$ folgende Form an (mit ' als Zeichen für totale Ableitungen nach x)

$$\boxed{Z' + Z \frac{u_\delta'}{y_\delta} F_1(H) - F_2(H) = 0} \tag{13}$$

$$\boxed{H' + H \frac{u_\delta'}{u_\delta} F_3(H) - \frac{F_4(H)}{Z} = 0} \tag{14}$$

Dabei sind F_1 bis F_4 durch den Ansatz (5) bekannte universelle Funktionen des Formparameters H . Die Lösung des simultanen Systems (13) (14) mit den Unbekannten $Z(x)$ und $H(x)$ für eine vorgegebene beliebige Aussenströmung $u_\delta(x)$ kann in einfacher Weise nach üblichen Verfahren erfolgen.

Die beim Pohlhausen-Verfahren anstelle von (14) benützte "Wandbindung" schreibt sich mit den hier gewählten Grössen:

$$Z \frac{u_\delta'}{u_\delta} = F_5(H) \approx 1.272H - 2 \tag{15}$$

Bei kompressibler Strömung ist neben dem Ansatz (5) für das Geschwindigkeitsprofil u/u_δ noch ein Ansatz für das Temperaturprofil T/T_δ nötig. Bei Be-

* Nach neuesten Auswertungen ist dem laminaren Ablöse-Profil der Wert $H=1.515$ angeordnet.

schränkung auf den Fall eines idealen Gases mit einer gleich 1 angenommenen PRANDTL-Zahl

$$P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} c_p = \text{spezif. Wärme bei konst. Druck,} \\ \lambda = \text{Wärmeleitzahl,} \end{array} \right) \quad (16)$$

sowie für kleine Druckgradienten dp/dx und kleine Temperaturgradienten dT_w/dx ($T_w =$ Wandtemperatur) besteht in Anlehnung an bekannte exakte Lösungen für die ebene Platte (siehe z.B. Ref. 6) eine eindeutige Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Temperatur-Profil in der Form

$$\frac{T}{T_\delta} = \frac{s_\delta}{s} = \varphi \left[\frac{u}{u_\delta}, M_\delta, \Theta \right] = a(M_\delta, \Theta) + b(M_\delta, \Theta) \frac{u}{u_\delta} + C(M_\delta) \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \quad (17)$$

mit

$$\Theta = \frac{T_0 - T_w}{T_0 - T_\delta} \quad (18)$$

als Parameter für den Wärmeübergang, mit

$$M_\delta = \frac{u_\delta}{a_\delta} \left(M_\delta^* = \frac{u_\delta}{a^*} \right) = \text{Kritische Mach-Zahl, } a^* = \text{Krit. Schall-Geschw.} \quad (19)$$

als örtliche MACH-Zahl und mit der Adiabaten-Beziehung

$$\frac{T_0}{T_\delta} = 1 + \frac{k-1}{2} M_\delta^2 \quad \left(k = \frac{c_p}{c_v}, c_v = \text{spez. Wärme bei konst. Volumen} \right) \quad (20)$$

Für das Temperaturprofil braucht damit kein besonderer Formparameter eingeführt zu werden [siehe Gl. (17)].

Das Gleichungssystem bleibt formal das gleiche wie bei inkompressibler Strömung. Es ist nur der Formparameter H in Gl. (14) durch eine "Parameterfunktion"

$$H^* (H, M_\delta, \Theta) = \frac{\delta_3}{\delta_2} \quad (21)$$

zu ersetzen. Die universellen Funktionen F_1 bis F_4 sind dann wie H^* von H , M_δ und Θ abhängig. Bei der Reynolds-Zahl R_δ ist die Definitionsgleichung (11a) zu beachten. Analytische Ausdrücke für diese Funktionen sind in ⁽¹⁰⁾ angegeben. $u_\delta(x)$, $M_\delta(x)$ und $\Theta(x)$ sind mit jeder Aufgabenstellung als bekannt anzusehen. $H(x)$ und $Z(x)$ sind auch hier die einzigen Unbekannten.

KURZE DARSTELLUNG DER NÄHERUNGSTHEORIE VON D. GEROPP⁹ MIT ZWEI-PARAMETRIGEM GESCHWINDIGKEITSPROFIL

Für das laminare Geschwindigkeitsprofil wird ein Polynom-Ansatz in $\eta = y/\delta(x)$ von der Form

$$\frac{u(x, y)}{u_\delta(x)} = 1 - (1 - \eta)^n (1 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3) \quad (5.1)$$

gemacht. Als einer der zwei Formparameter wird der Exponent n gewählt, als zweiter Formparameter die dimensionslose zweite Ableitung des Geschwindigkeitsprofils im Wandpunkt $\eta = 0$:

$$\left[\frac{\partial^2 u/u_\delta}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0} = -\lambda \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 lassen sich dann mit Beachtung eines von Geropp⁹ ermittelten Kopplungsgesetzes zwischen dem Exponenten n und der dimensionslosen Wandtangente

$$\left[\frac{\partial u/u_\delta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \equiv \alpha \quad (5.3)$$

als Funktionen von n und λ darstellen. Der so gewonnene Ansatz (5.1) liefert auch in stark beschleunigter Strömung physikalisch sinnvolle Geschwindigkeitsprofile (andere Ansätze versagten in diesem Fall, siehe z.B. Ref. 7) und passt sich im Druckanstiegsgebiet sehr gut an exakt berechnete Geschwindigkeitsprofile an.

Zur Bestimmung der drei Unbekannten $\delta(x)$, $n(x)$ und $\lambda(x)$ werden die drei Gleichungen (13), (14) und (15) als simultanes System benützt. Um dem Einfluss von Kompressibilität und Wärmeübergang zu erfassen, führt Geropp⁹ eine Koordinaten-Transformation des Howarth-Typs (siehe z.B. Ref. 6) ein, mit der die Gleichungen des kompressiblen Falles zu denen des inkompressiblen Falles in Beziehung gesetzt werden. Geropp kann dabei (im Gegensatz zur Original-Howarth-Transformation) ein beliebiges Zähigkeitsgesetz $\mu(T)$, z.B. das sehr genaue Gesetz von Sutherland (siehe z.B. Ref. 6), wählen.

Beim Vergleich mit verfügbaren exakten Lösungen hat sich dieses neue Rechenverfahren von Geropp als ausserordentlich genau erwiesen. (Siehe auch Kapitel 7.)

ERGEBNISSE NACH DER EIN-PARAMETRIGEN THEORIE VON WALZ¹⁰

Auf der Basis des Gleichungssystems (13) (14) wurden die Grenzschichtgrößen $Z(x)$ und $H(x)$ für verschiedene Werte der Störungsamplitude ϵ und der Wellenzahl p [Gl. (2), (3)] berechnet. Dabei interessieren vor allem die Minimalwerte des Formparameters H in den Verzögerungsphasen der überlagerten Störung. Wird $H < 1.519$, so ist laminare Ablösung, begleitet von einem starken Impuls- und Energieverlust, wie er in einer verzögerten Strömung vom Hartree-Typ $u_\delta(x) \sim x^m$ mit $m = -0.0904$ auftritt, zu erwarten. Wegen der darauf folgenden Beschleunigungsphase wird zwar das Geschwindigkeitsprofil wieder völliger und damit die Ablösegefahr bis zur nächsten Verzögerungsphase beseitigt. Das Wechselspiel zwischen Ablösung und Wiederanliegen der Strömung kann jedoch hier (anders als bei der Rechnung von Görtler⁴) als eine so grosse Störung des Strömungszustandes innerhalb der laminaren Grenzschicht angesehen werden, dass der Umschlag in den voll turbulenten Zustand sehr wahrscheinlich ist.

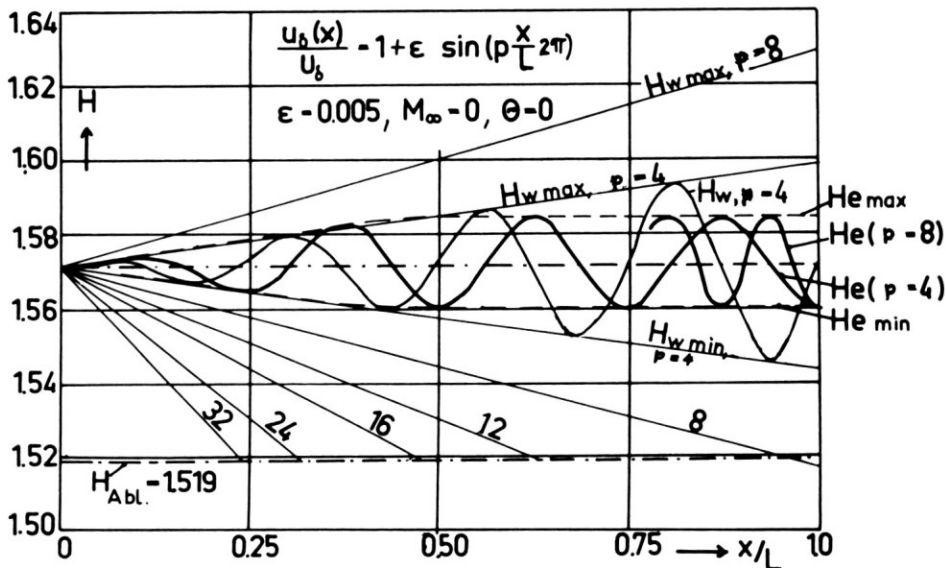


Fig. 3. Verlauf des Formparameters H über der Lauflänge x/L für relative Störungsamplitude $\epsilon = \Delta u_b / U_b = 0.005$, Mach-Zahl $M_\infty = 0$, $\Theta = 0$ (wärmeisolierte Wand), Wellenzahl $p = L/\lambda$ als Parameter. Ergebnis aus Impuls- und Energiesatz (13) (14): $H_\epsilon(x/L)$. Ergebnis aus Impulssatz (13) und Wandbindung (5) (22): $H_w(x/L)$.

In Fig. 3 ist das Ergebnis der Grenzschichtberechnung für die Amplitude $\epsilon = 0.005$ und verschiedene Wellenzahlen p bei *inkompressibler* Strömung wiedergegeben. Ausser dem Formparameter H , der aus dem Energiesatz (13) gewonnen wurde—wir wollen diese Grösse mit H_ϵ bezeichnen—, wurde auch mit der Wandbindung (15) die Grösse

$$Z \frac{u_b'}{u_b} = 1.272 H_w - 2 \quad (22)$$

berechnet.* H_w ist mit dem Formparameter des Pohlhausen-Verfahrens identisch, den Dryden¹ und Pretsch² für die Behandlung des vorliegenden Beispiels benützt haben.

Man erkennt, dass die Werte $H_{e \max}$ und $H_{e \min}$, unabhängig von der Wellenzahl p , asymptotischen Grenzwerten zustreben (siehe Fig. 3 für $\epsilon = 0.005$, $M_\delta = M_\infty = 0$, $\Theta = 0$), die offenbar nur von der Amplitude ϵ abhängen. Dieser Grenzwerte von H_ϵ werden praktisch schon nach 2 Wellenlängen erreicht. Die Minimal- und Maximalwerte H_w steigen dagegen (in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Dryden und Pretsch,^{1,3} bei beliebig kleinem Wert ϵ mit der Lauflänge

* Der Dickenparameter Z wurde dabei der Rechnung für H_ϵ entnommen. Insofern ist H_w nicht ganz identisch mit dem Ergebnis, das bei Anwendung des Original-Pohlhausen-Verfahrens erhalten würde. Diese vereinfachte Handhabung für den vorliegenden Zweck erschien jedoch erlaubt, da die Grösse $Z(x)$ ziemlich unempfindlich gegenüber dem benützten Rechenverfahren ist. Gl. (22) gilt in dieser Form nur für inkompressible Strömung, bei kompr. Strömung tritt darin noch ein von M_δ und Θ abhängiges Glied auf, das bei den Rechnungen berücksichtigt wurde.

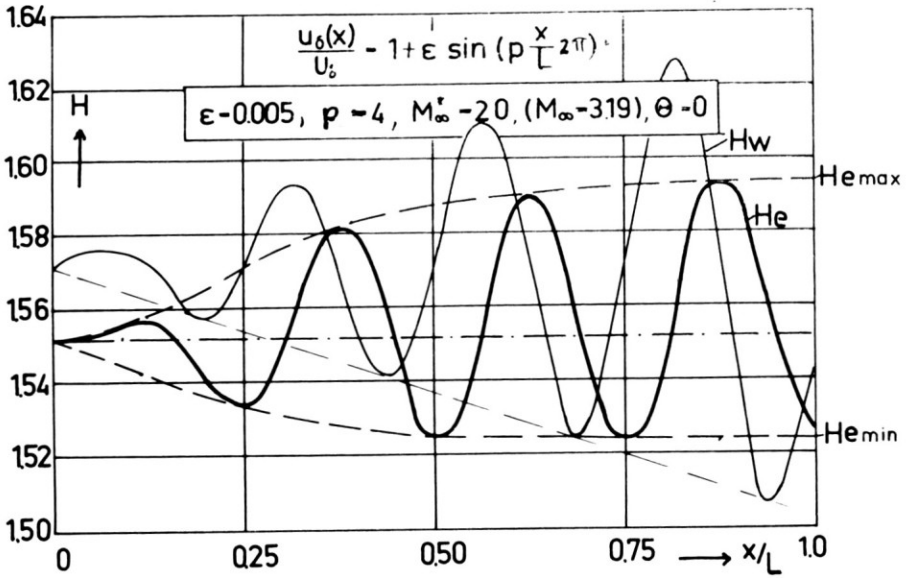


Fig. 4. Aufgabenstellung wie bei Bild 3, jedoch $M_\infty^* = 2.0$ ($M_\infty = 3.19$); $\theta = 0$.

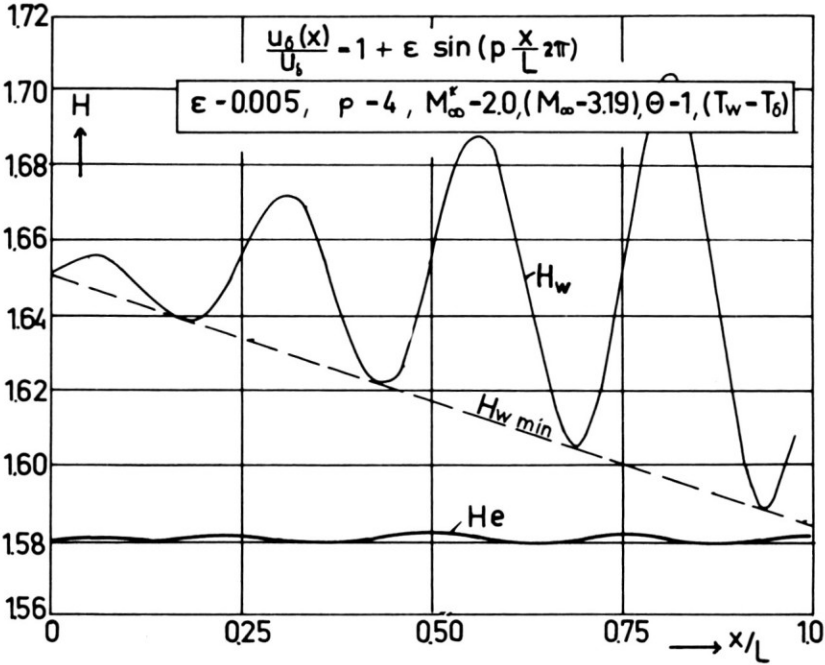


Fig. 5. Aufgabenstellung wie bei Bild 3, jedoch $M_\infty^* = 2.0$ ($M_\infty = 3.19$), $\theta = 1$ ($T_w = T_0$) (starke Kühlung).

x an, ein Ergebnis, das mit Beachtung der Untersuchungen, von Quick-Schröder³ und Görtler⁴ qualitativ wohl vernünftig, aber quantitativ anzuzweifeln ist, solange man mit einparametrischen Ansätzen für das Geschwindigkeitsprofil nach Gl. (5) rechnet. Der Formparameter H_e ist in diesem Falle offenbar die zuverlässigere Grösse.

In Figs. 4 und 5 sind die Ergebnisse für $\epsilon = 0.005$ bei $M_\infty = 3.19$, $\theta = 0$ und $\theta = 1$ (Kühlung) aufgetragen. Fig. 6 zeigt schliesslich die Auftragung des asymptotischen Grenzwertes von $H_{e\min}$ über der Störungsamplitude ϵ bei verschiedenen MACH-Zahlen für isolierte Wand, $\theta = 0$.

Nach Fig. 6 wird $H_{e\min} = H_{\text{Ablösung}} = 1.519$ im Falle der inkompressiblen Strömung bei $\epsilon = 0.0213$ erreicht. Diese kritische Amplitude nimmt mit steigender Mach-Zahl rasch ab. Bei $M_\infty^* = 2.0$ ($M_\infty = 3.19$) ist ϵ_{krit} nur noch 0.0072. Offenbar ist

$$\epsilon_{\text{krit}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad M_\infty \rightarrow \infty \quad (23)$$

zu erwarten. Bei einer Kühlung der Wand ($\theta > 0$) steigt ϵ_{krit} wieder an, wie dies aus Fig. 7 für $\epsilon_{\text{krit}}(M_\infty, \theta)$ zu ersehen ist.

Als Anfangswerte von H_e wurden in allen Fällen die Werte $H_e(M_\infty, \theta)$ gewählt, die sich nach den Rechnungen für die Plattenströmung ohne überlagerte Störung ergeben.

Es sei hier noch vermerkt, dass bei relativen Störungsamplituden ϵ bis zu einigen Prozent praktisch die gleichen Ergebnisse auch für eine sägezahnförmige statt sinusförmige Verteilung der Störungsgeschwindigkeit erhalten werden.

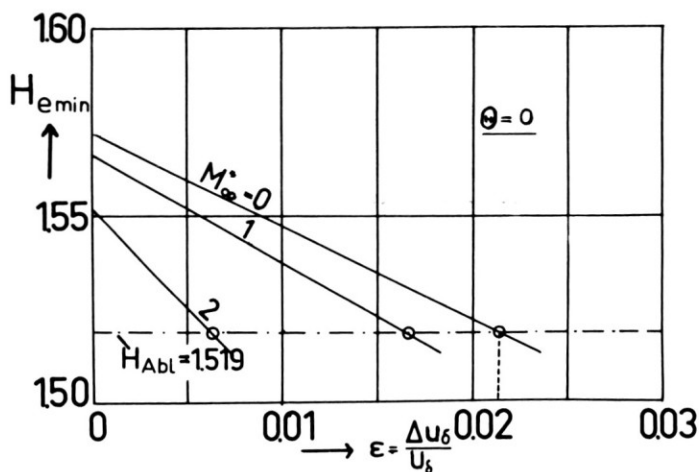


Fig. 6. Abhängigkeit des asymptotischen Minimalwertes $H_{e\min}$ des Formparameters (der unabhängig von der Wellenzahl p ist) von der relativen Störungsamplitude ϵ mit der kritischen Mach-Zahl M_∞^* als Parameter bei wärmeisolierter Wand, $\theta = 0$.

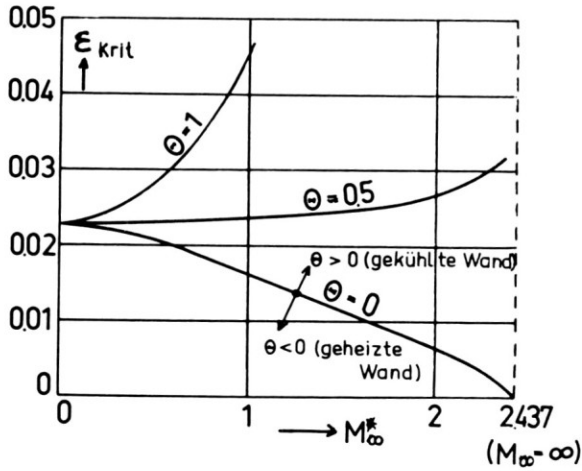


Fig. 7. Wert ϵ_{krit} der relativen Störungsamplitude, der zu dem asymptotischen Wert $H_{\epsilon_{min}} = 1.519 = H_{Abl}$ führt, abhängig von der Mach-Zahl M_{∞}^* mit θ als Parameter für den Wärmeübergang [Definition von θ siehe Gl. (18)].

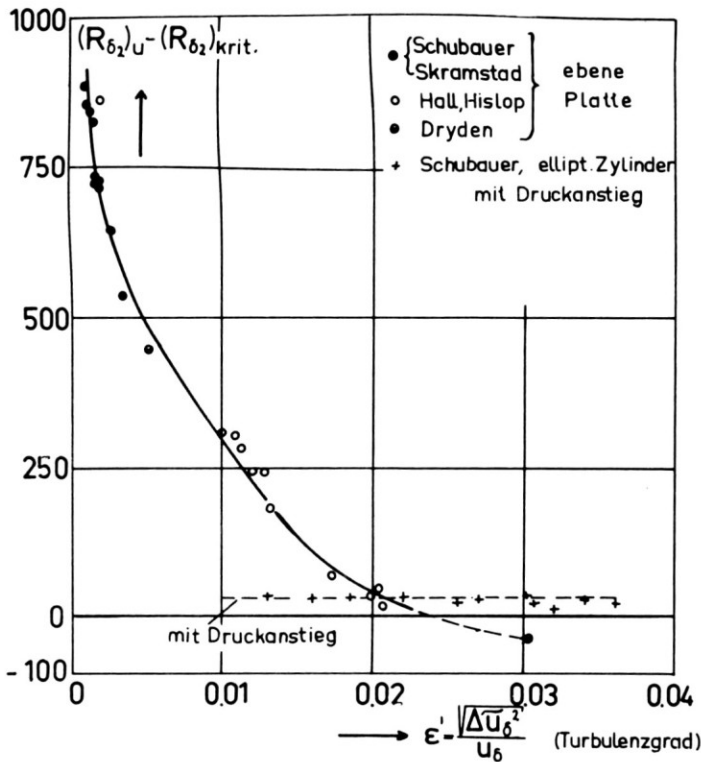


Fig. 8. Experimentelle Ergebnisse zur Abhängigkeit Reynolds-Zahl $(R_{\delta_2})_u$ des laminar-turbulenten Umschlages von Turbulenzgrad $\epsilon^1 = \sqrt{\Delta u_{\delta}^2}/u_{\delta}$ der Aussenströmung (nach Granville¹²). $(R_{\delta_2})_{krit}$ = kritische Reynolds-Zahl nach der Tollmien-Schlichtingschen Stabilitätstheorie.

ERGEBNISSE NACH DER ZWEI-PARAMETRIGEN THEORIE VON GEROPP

Geropp⁹ hat einige von Quick und Schröder⁴ mit dem Differenzen-Verfahren, d.h. mit grosser Genauigkeit behandelte Beispiele mit dem in Abschnitt 5 beschriebenen zwei-parametrischen Verfahren nachgerechnet.

In Fig. 9 sind die Ergebnisse für die laminare Ablösestelle ($\alpha = 0$) in Fall $\epsilon = 0.025$, $M_\infty = 0$, $\theta = 0$ miteinander verglichen. Beide Rechenverfahren

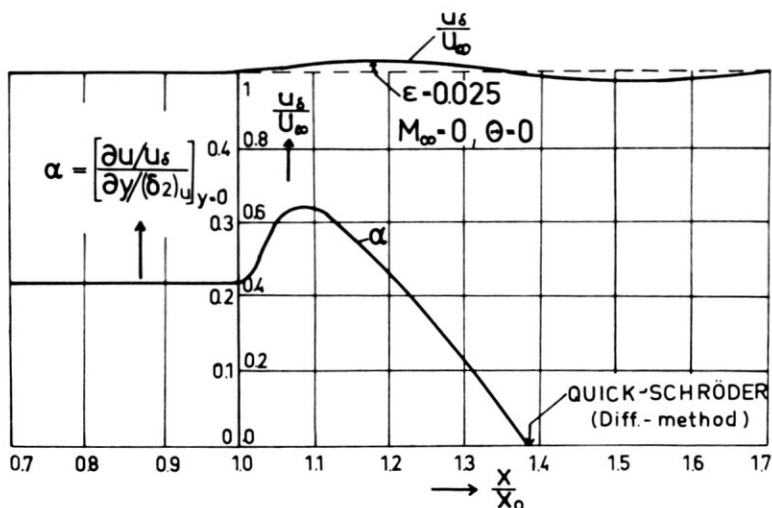


Fig. 9. Vergleich der Berechnung des Ablösepunktes $\alpha = 0$ nach Geropp⁹ und Quick-Schröder (Differenzen-Methode)⁴ für $\epsilon = 0.025$, $M_\infty = 0$, $\theta = 0$; X_0 = Lauflänge vor Beginn der Störung.

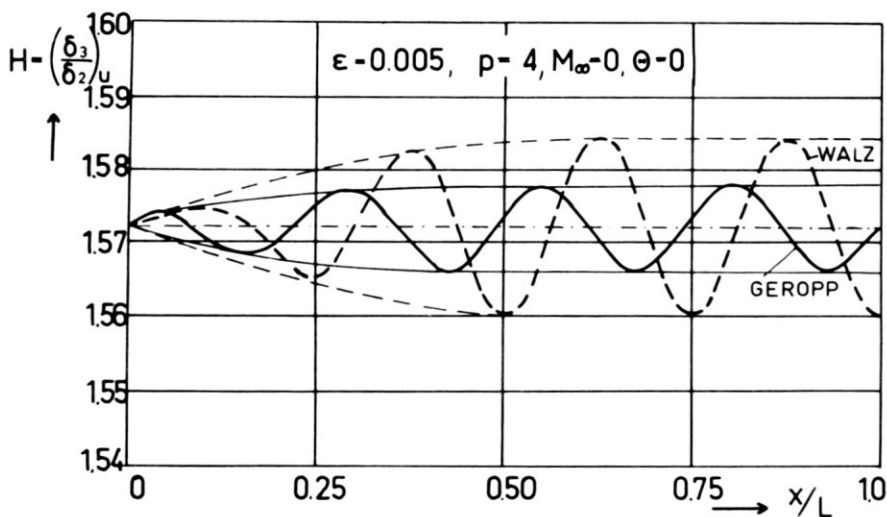


Fig. 10. Formparameter H als Funktion von X/L für $\epsilon = 0.005$, $p = 4$, $M_\infty = 0$, $\theta = 0$. Vergleich der Theorien Von Geropp⁹ und Walz.

ergeben in sehr genauer Übereinstimmung die Ablösestelle bei $x/x_0 = 1.385$ ($x_0 =$ ungestörte Vorlaufstrecke), also schon innerhalb der ersten Druckanstiegsphase. Auch bei den anderen Beispielen mit kleinerer Störungsamplitude ϵ , bei denen Ablösung erst nach mehreren Wellenlänge auftritt, ist die Übereinstimmung der Ergebnisse ebenso gut.

Figure 10 zeigt den Vergleich der Theorien von Geropp und Walz im Fall $\epsilon = 0.005$, $p = 4$, $M_\infty = 0$, $\Theta = 0$ für den Formparameter H . In beiden Fällen nähert sich H rasch asymptotischen Minimal- und Maximalwerten. Die Theorie von Geropp ergibt etwas geringere Schwankungsbreite von H . Während aber nach der Theorie von Walz einem konstanten Wert H ein ganz bestimmter Wert der dimensionslosen Wandtangente α zugeordnet ist, nimmt nach der Theorie von Geropp (siehe Fig. 11) die Schwankungsbreite von α mit der Lauflänge zu und zwar so, dass nach etwa 13 Wellenlängen (mit $\alpha = 0$) Ablösung

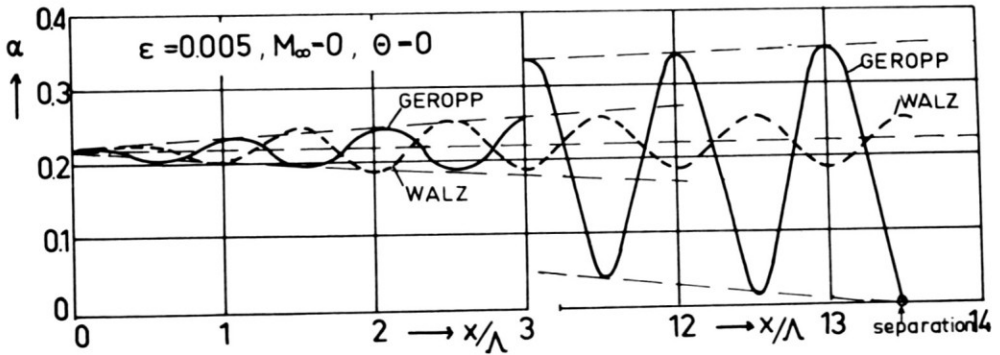


Fig. 11. Wandtangente $\alpha = [\partial(u/u\delta)/\partial(y/(\delta_2)u)]_{y=0}$ als Funktion der Lauflänge X/Λ für $\epsilon = 0.005$, $M_\infty = 0$, $\Theta = 0$. Theorien von Geropp⁹ und Walz.

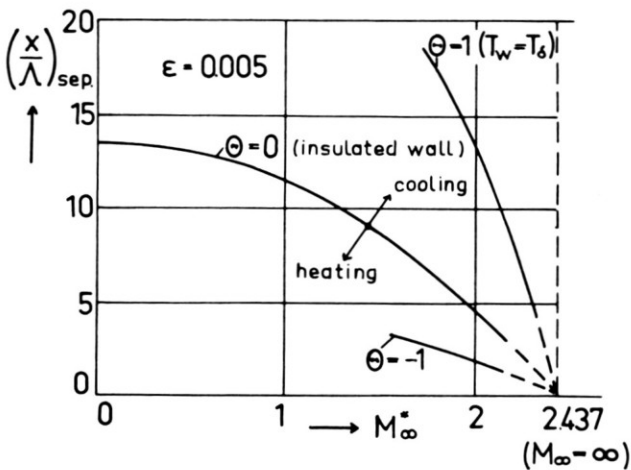


Fig. 12. Lage der laminaren Ablösestelle, $(X/\Lambda)_{\text{Abf}}$ als Funktion der kritischen Mach-Zahl M_∞^* mit Θ als Parameter. Ergebnisse der Theorie von Geropp.⁹ $\Theta > 0$: Kühlung, $\Theta < 0$: Heizung der Wand.

eintritt. Wegen des verhältnismässig grossen Wertes von H an der Albösestelle ist jedoch in diesem Fall nach den Überlegungen des Abschnittes 3 mit Fig. 1a nicht sicher mit einem Umschlagen in den turbulenten Zustand zu rechnen.

Aus Fig. 12 ist der Einfluss von Mach-Zahl und Wärmeübergang auf die laminare Ablösestelle nach den Rechnungen von Geropp⁹ zu erkennen. Die Tendenz dieses Einflusses ist die gleiche wie bei den Rechnungen von Walz, Fig. 7.

KRITISCHE BEMERKUNGEN UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

Es erscheint interessant, das Ergebnis $H_{\epsilon_{\min}}(\epsilon)$ aus Fig. 6 für inkompressible Strömung dem experimentellen Befund über den Einfluss des Turbulenzgrades

$$\epsilon' = \frac{\sqrt{u^2}}{u_\delta} \quad \tilde{u} = x - \text{Komponente der Störungsgeschwindigkeit} \quad (24)$$

eines Windkanals auf die Lage des Umschlagpunktes an der ebenen Platte gegenüber zu stellen. Zunächst ist zu beachten, dass bei der angenommenen sinusförmigen Verteilung (2) der Störungsgeschwindigkeit zwischen der relativen Amplitude ϵ und dem Turbulenzgrad ϵ' nach (24) die Beziehung

$$\epsilon' = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, dy} = \sqrt{\frac{1}{2}} \epsilon = 0.707\epsilon \quad (25)$$

besteht. (Bildung des Mittelwertes der Störungsgeschwindigkeit über eine Wellenlänge.) Nähert sich die Geschwindigkeitsverteilung der Störung mehr der Rechteckform, so strebt das Verhältnis ϵ'/ϵ gegen 1. Man kann auf jeden Fall sagen, dass ϵ' in der Regel nicht stark von ϵ verschieden sein wird.

Bekannte Messungen über die Reynolds-Zahl $(R_{\delta_2})_u$ des Umschlagpunktes abhängig vom Turbulenzgrad, wie sie z.B. von Granville¹² zusammengestellt wurden, Fig. 8, lassen erkennen, dass der Umschlagpunkt bei einem Turbulenzgrad von $\epsilon' = 0.02$ bis zum theoretischen Indifferenzpunkt $(R_{\delta_2})_{\text{krit}}$ vorrückt. Unsere Rechnung ergab nach etwa zwei Wellenlängen laminare Ablösung, wenn $\epsilon > 0.0213$ oder $\epsilon' > 0.015$ (unabhängig von der Wellenzahl p) angenommen wurde. Da nun die Wellenlänge Λ der Störung bei hinreichend grosser Reynolds-Zahl R_L (gebildet mit der Plattenlänge L) gegenüber der Plattenlänge sehr klein, L/Λ damit sehr gross sein wird, ist die laminare Ablösestelle schon nach sehr kurzer Laufstrecke (also kleiner Reynolds-Zahl R_{δ_2}) erreicht. Möglicherweise liegt dann die laminare Ablösestelle noch vor der Stelle, an der die kritische Reynolds-Zahl $(R_{\delta_2})_{\text{krit}}$ der Stabilitätstheorie auftritt. (Siehe den Messpunkt von Dryden in Fig. 8.)

Der hier durchgeführte Vergleich von Rechnung und Messung setzt, wie schon ausgeführt wurde, voraus, dass der an sich instationäre Vorgang durch eine stationäre Strömung vom Typ (2) angenähert werden kann. Wird die Störung durch eine turbulente Bewegung nach Art einer KARMANSCHEN Wirbelstrasse hervorgerufen, die sich bekanntlich langsamer fortbewegt als die Grundströmung, so ist ein quasi-stationärer Strömungszustand denkbar, bei dem die

Platte relativ zur KARMANSCHEN Wirbelstrasse als stillstehend angesehen werden kann. Man kann somit für eine abschätzende Rechnung annehmen, dass die Platte nur mit der Differenzgeschwindigkeit zwischen Hauptströmung und Fortbewegungsgeschwindigkeit der KARMANSCHEN Wirbelstrasse angeströmt wird. Das Ergebnis unserer Rechnung in bezug auf die Ablösestelle wäre aber in diesem Fall das gleiche, da die Reynolds-Zahl in diese Rechnung nicht eingeht.

Bemerkenswert ist das Ergebnis der Rechnung zum Einfluss von Mach-Zahl und Wärmeübergang auf den Verlauf der Minimal- und Maximalwerte des Formparameters H_e , Fig. 6. Mit wachsender Mach-Zahl wird der für laminare Ablösung charakteristische Wert $H_{e_{\min}} = 1.519$ schon bei verhältnismässig kleinen Störungsamplituden ϵ erreicht (bei $M_\infty^* = 2.0$, $M_\infty = 3.19$ ist ϵ_{krit} auf etwa $1/3$ des Wertes bei $M_\infty = 0$ herabgesetzt). Eine Kühlung, z.B. bei $M_\infty^* = 2.0$ so, dass $T_w = T_\delta(\Theta = 1)$ ist, führt hingegen zu einer starken "Dämpfung" des Störungseinflusses auf die Entwicklung des Formparameters H_e (siehe Fig. 5), so dass auch bei grossen Störungsamplituden $\epsilon > 0.02$ keine Ablösung auftritt (siehe Fig. 7).

Zur physikalischen Deutung dieses Ergebnisses ist folgendes auszuführen:

In einer Strömung ohne Druckgradient werden die Geschwindigkeitsprofile mit zunehmender Mach-Zahl nach exakten Rechnungen (siehe z.B. in Ref. 2) weniger völlig (kleinere Werte des Formparameters H) und die Dichte ρ nimmt wegen der Temperaturzunahme in Wandnähe ab. Es steht also in der Grenzschicht weniger kinetische Energie zur Verfügung als bei der inkompressiblen Plattenströmung. Kommt nun eine in dieser Weise "vorbelastete" Grenzschicht in ein Druckanstiegsgebiet, so genügen verhältnismässig kleine Druckgradienten, um Ablösegefahr heraufzubeschwören. Bei Kühlung der Grenzschicht von der Wand her (positive Werte des Parameters Θ) können die Geschwindigkeitsprofile der Strömung ohne Druckgradient völliger werden als das Blasius-Profil (siehe Fig. 7, Kurve für $\Theta = 1$). Gleichzeitig nimmt die Dichte in Wandnähe zu. In diesem Fall bringen die Geschwindigkeitsprofile einen hohen Vorrat an kinetischer Energie mit (grosse Werte H). Werden diese Geschwindigkeitsprofile nun einem Druckanstieg ausgesetzt, so sind grosse Druckgradienten nötig, um die kinetische Energie in Wandnähe nennenswert zu verringern. Auch in der Druckabfallphase kann das Geschwindigkeitsprofil nur unwesentlich verändert werden. So ist z.B. das in Fig. 5 dargestellte Ergebnis verständlich, das zeigt, dass eine Störung mit $\epsilon = 0.005$ den Formparameter H_e kaum verändert. In diesem Falle erweist sich der Fehler bei alleiniger Beachtung der Wandbindung (22) zur Bestimmung von $H = H_w$ als besonders gross (die Wandbindung lässt die Energiebilanz völlig ausser acht).

Aus den besprochenen Ergebnissen kann auch eine gewisse Parallele zu den Ergebnissen der klassischen Stabilitätstheorie der laminaren Grenzschicht (siehe z.B. Ref. 6) herausgelesen werden: zunehmende Mach-Zahl begünstigt den Umschlag in den turbulenten Zustand, Kühlung setzt die Umschlag-Neigung stark herab.

In beschleunigter Grundströmung werden die Druckgradienten der überlagerten Störungsgeschwindigkeit verkleinert oder aufgehoben, bei verzögerter Strömung verstärkt. Dementsprechend ist bei beschleunigter Grundströmung

die Neigung zu laminarer Ablösung in den Druckanstiegsphasen der überlagerten Störströmung (wenn diese nicht durch den Druckabfall der Grundströmung ganz aufgehoben werden) verringert, bei verzögerter Grundströmung verstärkt. Auch in diesem Falle ist das Ergebnis dieser Berechnung der laminaren Ablösung in der Tendenz mit den Ergebnissen der klassischen Stabilitätstheorie vergleichbar: in beschleunigter Strömung ist die kritische Reynolds-Zahl für den laminar-turbulenten Umschlag bekanntlich wesentlich grösser als in verzögerter Strömung.

ZUSAMMENFASSUNG

Laminare Grenzschicht-Ablösung ist bekanntlich eine der möglichen Umschlag-Ursachen. Frühere Berechnungen der laminaren Ablöse- (Umschlag)-Stelle an einer welligen Wand bei inkompressibler Strömung (Dryden 1936, Quick-Schröder 1944, Görtler 1947) ergaben, dass nach genügend langer Laufstrecke auch bei kleinster Amplitude der Wandwelligkeit Ablösung, also auch Umschlag zu erwarten ist. Diese früheren Rechnungen wurden mit verbesserten Methoden nach dem Prinzip von v. Kármán-Pohlhausen (z.B. gleichzeitige Berücksichtigung der Integralbedingungen für Impuls, Energie und der Wandbindung) wiederholt und für den Fall kompressibler Strömung mit Wärmeübergang verallgemeinert. Ergebnis: Für vorgegebene Amplitude und Wellenlänge der Strömungsgeschwindigkeit rückt mit zunehmender Mach-Zahl die Ablöse (Umschlag-) Stelle stromaufwärts, bei Kühlung der Wand stromabwärts. Es ist eine gewisse Analogie zu den Ergebnissen der Stabilitätstheorie festzustellen.

REFERENCES

1. Dryden, H. L., "Air Flow in the Boundary Layer Near a Plate," NACA Rep. 562, 1936.
2. Pohlhausen, K., "Zur näherungsweise Integration der Differential-Gleichungen der laminaren Grenzschicht," *ZAMM* Bd. 1, S. 235, 1921.
3. Pretsch, J., "Die Stabilität einer ebenen laminar-Strömung bei Druckgefälle und Druckanstieg," *Jahrb. d. deutsch. Luftfahrtforschg.*, Bd. I, S. 58-75, 1941.
4. Quick, A. W., und K. Schröder, "Verhalten der laminaren Grenzschicht bei periodisch schwankendem Druckverlauf," *Zentr. für Wiss. Berichtsw. über Luftf. Berlin*, Unt. u. Mitt., 1257, 1944.
5. Görtler, H., "Einfluss einer schwachen Wandwelligkeit auf den Verlauf der laminaren Grenzschichten," *ZAMM* Bd. 25, 27, 28, 1947 und 1948.
6. Schlichting, H., *Grenzschichttheorie* 3. Auflage, Braun-Verlag, 1958, 343-345.
7. Wieghardt, K., "Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten," *Ing. Arch.* Bd. 16, S. 243, 1948, und interner Bericht des KWI, Göttingen, 1944.
8. Walz, A., "Anwendung des Energiesatzes von Wieghardt auf ein-parametrische Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten," *Ing.-Arch.* Bd. 16, 3./4. Heft, 1948.
9. Geropp, D., "Beitrag zur Berechnung kompressibler laminarer Grenzschichten mit Wärmeübergang mit zwei-parametrigem Lösungsansatz für das Geschwindigkeitsprofil," *Dissertation an der Technischen Hochschule Karlsruhe*, 1963.
10. Walz, A., "Beitrag zur Näherungstheorie kompressibler laminarer Grenzschichten mit Wärmeübergang mit ein-parametrigem Lösungsansatz für das Geschwindigkeitsprofil," *DVL-Bericht* No. 281, 1963.
11. Hartree, D. R., "On an Equation Occurring in Falkner and Skan's Approximate Treatment of the Equations of the Boundary Layer," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 13, part II, 1937.
12. Granville, P. S., "The Calculation of the Viscous Drag of Bodies of Revolution," *Rep. No. 849 of the David W. Taylor Model Basin*, Washington, D. C., July, 1953.

Author: A. Walz

Discussor: R. Michel, ONERA, France

La méthode de calcul du Prof. Walz et l'application qu'il en a présentée sont évidemment très intéressantes puisqu'elles permettent déjà de prédire dans des conditions aussi variées qu'il est souhaitable, l'influence d'une variation sinusoidale de la vitesse extérieure sur la couche limite laminaire et en particulier sur le décollement.

Elles laissent prévoir comme l'a souligné le Prof. Walz la possibilité d'aborder des problèmes pratiques importants comme celui de l'influence de la turbulence de l'écoulement extérieur sur la transition.

Les résultats présentés aujourd'hui ne portent cependant que sur un paramètre de forme lié au profil des vitesses et qui est indépendant du nombre de Reynolds.

Or la transition doit évidemment faire intervenir en plus du paramètre de forme, le nombre de Reynolds, basé par exemple sur l'épaisseur de quantité de mouvement. Cette épaisseur et ce nombre de Reynolds, ont-ils été calculés dans vos applications?

Author's reply to discussion:

Ja. Die in meinem Vortrag dargestellten Rechenergebnisse über die laminare Ablösestelle sind durch Lösen des simultanen Systems zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen, nämlich der Integralbedingungen für Impuls und Energie gewonnen worden. Die Rechnung lieferte daher zwangsläufig auch den Verlauf der örtlichen Reynolds-Zahl $R_{\delta_2}(x)$ (gebildet mit der Impulsverlustdicke $\delta_2(x)$). Zweifellos spielt R_{δ_2} neben dem Formparameter H des Geschwindigkeitsprofils nach Theorie und Experiment beim Umschlag-Phänomen eine grosse Rolle. Bei Beachtung des Einflusses von R_{δ_2} würde die Stabilitätstheorie den Umschlag in der Regel vor der laminaren Ablösestelle erwarten lassen. Es erschien sinnvoll, zunächst (ohne Zuhilfenahme der Stabilitätstheorie) aufzuzeigen, wie sich die laminare Ablösestelle, als praktisch spätest mögliche Umschlagstelle, mit Mach-Zahl und Wärmeübergang verändert.

Dr. R. Michel:

Il pourrait alors vous intéresser d'utiliser un critère que nous avons établi, pour prédire la transition en fluide incompressible. Ce critère que si présente sous la forme d'une courbe reliant le paramètre de forme au nombre de Reynolds, montre que la couche limite laminaire peut supporter une usure (représentée par le nombre de Reynolds) d'autant plus grande, que sa qualité (représentée par le paramètre de forme) est plus élevée. Il vous permettrait de préciser la position en avant du décollement à laquelle a lieu la transition.

Prof. Walz:

Das von M. le Dr. Michel erwähnte Umschlag-Kriterium (für inkompressible Strömung) in Gestalt eines Zusammenhangs zwischen der Reynolds-Zahl R_{δ_2} des Umschlages und des Formparameters H ist das experimentelle Gegenstück zu dem bekannten Ergebnis $R_{\delta_2 \text{ krit}}(H)$ der klassischen Stabilitätstheorie (siehe z.B. Schlichting, Grenzschichttheorie 3. Auflage Braun-Verlag 1958, Seite 384), nach dem die kritische Reynolds-Zahl $R_{\delta_2 \text{ krit}} (< R_{\delta_2 \text{ umschlag}})$ bei Geschwindigkeitsprofilen mit Wendepunkt stark abnimmt. Beim Ablöseprofil ist $R_{\delta_2 \text{ krit}} \approx 25$, die Stabilität demnach so klein, dass die Annahme Ablösepunkt = spätester Umschlagpunkt gerechtfertigt erscheint.

Dr. R. Michel:

L'influence d'un point d'inflexion dans le profil des vitesses, qui est primordiale en incompressible, n'est plus la seule en fluide compressible et avec flux de chaleur ou interviennent manifestement la distribution des densités ou des températures.

Il est à ce sujet frappant d'observer, que les transitions dans les problèmes supersoniques se produisent dans la grande majorité des cas pratiques en gradient de vitesse extérieure positif. C'est à dire dans des cas où la théorie de la couche limite laminaire ne prévoit guère d'inflexion dans le profil des vitesses et en tout cas aucun décollement.